Математика

УДК 517.968

Развитие идей С.А. Ломова в теории сингулярно возмущенных интегральных и интегродифференциальных уравнений

К 90-летию со дня рождения С.А. Ломова

В. Ф. Сафонов, А. А. Бободжанов*

Дан обзор последних результатов исследования теории сингулярных возмущенных интегральных и интегродифференциальных уравнений, полученных с помощью метода регуляризации С.А. Ломова. Работа посвящена 90-летию со дня рождения основателя метода регуляризации С.А. Ломова.
Ключевые слова: сингулярно возмущенный, интегральные и интегродифференциальные уравнения, нормальные формы.

Профессор, доктор физико-математических наук Сергей Александрович Ломов

12 октября 2012 г. исполнилось 90 лет доктору физико-математических наук, профессору Сергею Александровичу Ломову. С. А. Ломов родился в с. Ершово Белинского района Пензенской области в семье крестьянина. С 1941 по 1947 г. он служил в частях Дальневосточного округа. После окончания в 1953 г. механико-математического факультета МГУ Сергей Александрович был направлен на работу в Московский энергетический институт, где в 1963 г. защитил кандидатскую, а в 1969 г. докторскую диссертацию. В 1971 г. он стал профессором. В 1969 г. С.А. Ломова избрали заведующим кафедрой спецкурсов высшей математики МЭИ, и в этой должности он проработал более 20 лет, вплоть до 1990 г.

Первые исследования С.А. Ломова связаны с математическим описанием пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с особенностями.

Уже в одной из первых работ С. А. Ломов обращает внимание на то, что пограничный слой в задаче $(\varepsilon + x)y'' +$

* bobojanova@mpei.ru

$+ a(x)y' + b(x)y = h(x)$, $y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0$, невозможно описать с помощью одной переменной $t = x/\varepsilon$, как это можно сделать, например, для экспоненциального пограничного слоя. Тогда впервые у него возникла оригинальная идея описания пограничного слоя в терминах двух независимых переменных t и x. Но в этой работе использовалась специфика регулярной особой точки $x = -\varepsilon$. В ней новая переменная «отщеплялась» вместе с алгебраической особенностью от исходной независимой переменной. Благодаря этим исследованиям в математику прочно вошло понятие *степенного пограничного слоя*, которое по праву связывается с именем С.А. Ломова. При изучении нелинейной задачи с аналогичной особенностью С.А. Ломов вместо «отщепления» уже вводит в уравнение дополнительную независимую переменную $t = x/\varepsilon$. Свое строгое математическое обоснование идея перехода в пространство большей размерности получила при изучении модельного уравнения Лайтхилла (1964 г.). Рассматривая задачи колебательного типа и задачи с точкой поворота, С.А. Ломов впервые вводит регуляризацию по спектру предельного оператора. Исследования, связанные с регуляризацией по спектру, завершаются созданием *метода регуляризации сингулярных возмущений*, основная идея которого изложена в его монографии «Введение в общую теорию сингулярных возмущений» [1].

С момента выхода в свет этой книги до настоящего времени метод регуляризации обогатился новыми идеями и многочисленными приложениями. Наиболее полный обзор этих приложений представлен в недавно опубликованной книге «Основы математической теории пограничного слоя» (Издательство Московского университета, 2011), бóльшая часть которой была написана Сергеем Александровичем, а после неожиданной его кончины в 1993 г. заново переосмыслена и дополнена новыми главами его сыном Игорем Сергеевичем Ломовым (профессором МГУ). В ней наиболее выпукло представлен тот материал, основу которого заложил сам Сергей Александрович. Это сингулярно возмущенные задачи для простого и кратного спектра предельного оператора, задачи с внутреннем пограничным слоем (по другой терминологии — задачи с нестабильным спектром и задачи с точками поворота), проблема построения точных решений в виде псевдоаналитических рядов и, наконец, обобщение метода регуляризации на задачи с непрерывным спектром. Существенная часть книги дополнена исследованиями И.С. Ломова по аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений. Поскольку в ней лишь реферативно излагаются наиболее интересные результаты в интенсивно развивающейся в настоящее время теории интегральных и интегродифференциальных сингулярно возмущенных уравнений, мы сочли необходимым дать их более полный обзор.

Несмотря на то что интегральные и интегродифференциальные сингулярно возмущенные уравнения являются объектами исследований ученых начиная с середины прошлого столетия, многие вопросы их асимптотического интегрирования (в тех или иных ситуациях поведения спектра предельного оператора) остаются открытыми. В основном завершены исследования для спектра, лежащего слева от мнимой оси (А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, М.И. Иманалиев и др.) или для случая, когда все точки спектра лежат на мнимой оси (Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.Н. Филатов и др.). Если же спектр стабилен и может содержать как чисто мнимые точки, так и точки, лежащие вне мнимой оси, то для асимптотического интегрирования интегродифференциальных уравнений применяется метод регуляризации С.А. Ломова. Однако и в применении этого метода к некоторым типам интегродифференциальных уравнений обнаружились определенные трудности. Сначала укажем на задачи, по отношению к которым метод регуляризации апробирован и полностью обоснован, а затем выделим те из них, при исследовании которых возникают упомянутые трудности.

Первый результат для интегродифференциальных систем был получен самим С.А. Ломовым в 1978—1980 гг. Им была рассмотрена классическая начальная задача [1] для интегродифференциальной системы типа Вольтерра:

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y + \int\limits_0^t K(t, s)y(s, \varepsilon)\ \mathrm{d}s + h(t),\ y(0, \varepsilon) = y^0,\ t \in [0, T]. \qquad (1)$$

Была проведена регуляризации этой задачи и разработан алгоритм построения ее асимптотических решений при обычных условиях на исходные данные задачи:

1) $A(t) \in C^{\infty}\left([0, T], \mathbb{C}^{n^2}\right),\ h(t) \in C^{\infty}\left([0, T], \mathbb{C}^{n}\right),\ K(t, s) \in C^{\infty}\left(0 \le s \le t \le T, \mathbb{C}^{n^2}\right);$

2) спектр $\sigma(A(t)) \equiv \{\lambda_i(t)\}$ матрицы $A(t)$ стабилен, т.е.

а) $\lambda_j(t) \ne \lambda_i(t),\ i \ne j,\ i, j = \overline{1, n}\ \ \forall t \in [0, T]$;

б) $\lambda_i(t) \ne 0\ \ \forall t \in [0, T],\ i = \overline{1, n}$.

Обсуждение предстоящего доклада И.И. Маркуша (справа) на конференции в Дрогобыче в 1988 г. (слева В.Ф. Сафонов, в середине С.А. Ломов)

Основное отличие интегродифференциальных уравнений от дифференциальных систем состоит в сложной и опосредованной регуляризации интегрального оператора

$$Jy = \int\limits_0^t K(t, s)y(s, \varepsilon)\ \mathrm{d}s.$$

В дифференциальной системе для регуляризации достаточно применить формулу сложного дифференцирования. Для интегральных операторов нет аналога этой формулы, поэтому расширение интегрального оператора должно проходить иначе. Применяя операцию интегрирования по частям к каждому элементу пространства

$$U = \left\{ y(t,\tau) \colon y = \sum_{j=1}^{n} y_j(t) e^{\tau_j} + y_0(t),\ y_j(t) \in C^{\infty}\left([0,T], \mathbb{C}^n\right), j = \overline{0,n} \right\},$$

используемого в дифференциальных системах для решения итерационных задач, С.А. Ломов приходит к выводу, что пространство, инвариантное относительно интегрального оператора, должно быть расширено и иметь вид пространства U, но в нем коэффициенты $y_j(t)$ каждого элемента $y(t, \tau)$ должны зависеть не только от t, но и от параметра ε. Точнее, они должны быть асимптотическими степенными рядами по ε, равномерно сходящимися по $t \in [0, T]$. Вместе с тем коэффициенты регуляризованного асимптотического решения задачи (1) не должны регулярно зависеть от ε. Как же разрешить это противоречие? С.А. Ломов приходит к выводу, что исходное пространство решений U следует оставить неизменным, а для образа интегрального оператора J нужно использовать другое пространство — пространство, *асимптотически инвариантное относительно* оператора J. Это пространство имеет вид $U\big|_{\tau = \psi(t)/\varepsilon}$, где $\psi(t)/\varepsilon$ — вектор регуляризирующих функций:

$$\frac{\psi(t)}{\varepsilon} \equiv \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \{\lambda_1(\theta), \ldots, \lambda_n(\theta)\}\, d\theta\,. \tag{2}$$

При этом расширение $\tilde{J}$ интегрального оператора J будет определено на множестве асимптотических рядов

$$y(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t,\tau) \tag{3}$$

с коэффициентами $y_k(t,\tau) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^{(k)}(t) e^{\tau_j} + y_0^{(k)}(t) \in U$, а сам оператор $\tilde{J}$ будет иметь довольно сложную структуру:

$$\tilde{J}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \sum_{r=0}^{\nu} R_{\nu - r} y_r(t,\tau),$$

где R_m: $U \to U$ — операторы порядка, действующие на каждую функцию $y(t, \tau)$ пространства U по закону:

$$R_0 y(t,\tau) \equiv R_0\left(\sum_{j=1}^{n} y_j(t) e^{\tau_j} + y_0(t)\right) = \int_0^t K(t,s) y_0(s)\, ds\,;$$

$$R_m y(t,\tau) = (-1)^m \left(\sum_{j=1}^{n} \left\{ I_j^m [K(t,s) y_j(s)] \right\}_{s=1} e^{\tau_j} - \left\{ I_j^m [K(t,s) y_j(s)] \right\}_{s=0} \right); \tag{4}$$

$$I_j^0 = \frac{1}{\lambda_j(s)};\ I_j^m = \frac{1}{\lambda_j(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_j^{m-1},\ m \ge 1\,.$$

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной (1):

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde{y}-\tilde{J}\tilde{y} = h(t),\ y(0,0,\varepsilon) = y^0. \tag{5}$$

Решение этой задачи следует искать в виде регулярного ряда (3) по степеням параметра ε.

Идеи С.А. Ломова, примененные им при исследовании задачи (1), нашли дальнейшее развитие при рассмотрении интегродифференциальных уравнений

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y+\int_0^1 K(t,s)y(s,\varepsilon)\,\mathrm{d}s+h(t),\ y(0,\varepsilon) = y^0,\ t\in[0,1] \tag{6}$$

типа Фредгольма [2]. Однако в данном случае интегральный оператор $Jy = \int_0^1(-A^{-1}(t)K(t,s))y(s,\varepsilon)\,\mathrm{d}s$ может иметь характеристические значения (находиться на спектре), поэтому приходится «подправлять» пространство U решений итерационных задач и пространство $Z = U|_{\tau = \psi(t)/\varepsilon}$, инвариантное относительно оператора J: при отсутствии характеристических значений оба пространства находятся в зависимости в виде многочлена от экспонент $e^{\psi_j(1)/\varepsilon}$, а при наличии характеристических значений они зависят от указанных экспонент аналитически.

После защиты докторской диссертации В.Ф. Сафоновым (учеником С.А. Ломова; факультет высшей математики и кибернетики МГУ, 1990). На переднем плане (слева направо): С.А. Ломов, акад. А.Н. Тихонов, В.Ф. Сафонов, акад. В.А. Ильин, чл.-корр. АН Узбекской ССР А.Н. Филатов

В начале 90-х годов прошлого столетия при с изучении связи между методом регуляризации Ломова и методом эквивалентного дифференциального соответствия Ларионова возникла необходимость в изучении задач

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)\,d\theta} K(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds + h(t),\ y(0,\varepsilon) = y^0,\ t\in[0,T] \qquad (7)$$

с быстро изменяющимися ядрами. Первые результаты в этом направлении были получены В.Ф. Сафоновым и Б.Т. Калимбетовым в 1994—1995 гг. Несмотря на то что основная идея регуляризации в данном случае остается той же, что и для задач типа (1) с медленно изменяющимися ядрами, реализация этой идеи нетривиальным образом трансформируется при переходе от стабильного спектрального значения ($\mu(t) \neq 0$ ($\forall t \in [0, T]$)) к нестабильному ($\mu(t) = -t^k l(t)$, $l(t) > 0$ ($\forall t \in [0, T]$)). При стабильном спектральном значении регуляризация и построение пространств U и Z аналогичны классическому случаю, когда имеют место медленно изменяющиеся ядра. Однако если $\mu(t) = -t^k l(t)$, $l(t) > 0$ ($\forall t \in [0, T]$), то пространства U и Z существенно изменяются: кроме слагаемых, зависящих от функций пограничного слоя $e^{\psi_j(t)/\varepsilon}$, в них появляются слагаемые, зависящие от специальных функций типа

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(\theta)\,d\theta}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu(\theta)\,d\theta}\frac{s^j}{j!}\,ds \quad (j = \overline{0, k-1}),$$

а сама операция интегрирования по частям, применяемая при регуляризации интегрального оператора, модифицируется с учетом нулей спектрального значения $\mu(t)$. Более подробно об этом можно прочесть в [3].

Если спектральное значение $\mu(t)$ стабильно, но нестабильным является спектр $\sigma(A(t))$ оператора $A(t)$ (например, если $\lambda_1(t) = -t^k l_0(t)$, $l_0(t) > 0$ $\forall t \in [0, T]$), то возникают существенные трудности при регуляризации интегрального оператора. Напрямую применить идею регуляризации С.А. Ломова не представляется возможным, поэтому в [4] развивается регуляризация с помощью нормальных форм, впервые изложенная Ю.П. Губиным и В.Ф. Сафоновым в [5] при рассмотрении нелинейных задач с нетождественным резонансом. Основная идея такой регуляризации состоит в том, что регуляризирующие переменные вводятся не непосредственно по спектру предельного оператора $A(t)$, а вычисляются опосредованно как решения нормальной формы

$$\varepsilon\frac{du_1}{dt} = \lambda_1(t)u_1 + \sum_{r=1}^{i+1}\varepsilon^r g_r(t),\ u_1(0,\varepsilon) = 1;$$

$$\varepsilon\frac{du_j}{dt} = \lambda_j(t)u_j,\ u_j(0,\varepsilon) = 1,\ j = \overline{2, n}, \qquad (8)$$

где функции $g_r(t)$ вычисляются в процессе построения регуляризованного асимптотического решения исходной задачи (7).

Если же рассматривается случай с медленно изменяющимся ядром и нестабильным спектром $\sigma(A(t))$ [см. уравнения (1)], то могут возникнуть точки поворота и регуляризация задачи (1) должна проводиться с учетом таких точек. В настоящее время сделаны лишь начальные шаги в этом направлении (см. [6]). Для полного решения этой проблемы потребуются тонкий математический аппарат и значительные усилия.

В 2005 г. в качестве курсовой работы студентке третьего курса М.А. Бободжановой была предложена скалярная задача

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = \int_0^t k_0(t,s)y(s,\varepsilon)\,ds + h(t),\ \ y(0,\varepsilon) = y^0,\ \ t\in[0,T], \tag{9}$$

в которой отсутствует оператор $A(t)$ дифференциальной части. Предполагалось, что регуляризация задачи (9) и ее асимптотическое решение будут получены по аналогии с классическим случаем (1), поэтому ничего экстраординарного в задаче (9) не ожидалось. Однако трудности возникли уже на начальном этапе решения задачи (9), когда с помощью модельных примеров никак не удавалось выявить сингулярности в решении этой задачи и оператор, их порождающий. Тогда было предложено продифференцировать уравнение (9) по t и построить эквивалентную интегродифференциальную задачу. Оказалось, что она записывается в форме

$$\varepsilon\frac{d^2y}{dt^2} = k_0(t,t)y + \int_0^t \frac{\partial k_0(t,s)}{\partial t}y(s,\varepsilon)\,ds + \dot{h}(t),\ y(0,\varepsilon) = y^0,\ \dot{y}(0,\varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon},$$

откуда видно, что функции, отвечающие за сингулярности в решении задачи (9), находятся из уравнения

$$\varepsilon\lambda^2 = k_0(t,t) \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{k_0(t,t)}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Следовательно, при $k_0(t, t) \neq 0$ ($\forall t \in [0, T]$) могут быть два варианта:

а) $k_0(t, t) > 0$;

б) $k_0(t, t) < 0$ ($\forall t \in [0, T]$).

Для варианта а) в решении задачи (9) будут иметь место быстро убывающая и быстро возрастающая экспоненты, поэтому нет смысла рассматривать задачу Коши (9); в этом случае разумной является краевая задача, но уравнение (9) есть уравнение первого порядка и для него должно быть поставлено только одно граничное условие. Следовательно, вариант а) в отношении построения асимптотических решений некорректен. Остается вариант б), но он приводит к чисто мнимому спектру $\{\pm i\sqrt{-k_0(t,t)}\}$. Хотя построение регуляризованных асимптотических решений в этом случае не является проблемой, предельный переход в задаче (9) при стремлении малого параметра ε к нулю остается не исследованным. Ситуация осложняется еще и тем, что асимптотическое решение задачи (9) строится не по целым степеням параметра , а по дробным степеням (по степеням $\sqrt{\varepsilon}$). Кроме того, начальные условия для уравнения (9) будут бесконечно большими при $\varepsilon \to +0$. Все эти проблемы были детально изучены, а соответствующие результаты опубликованы в [7] уже для более общей интегодифференциальной задачи

$$\varepsilon^2\frac{dy}{dt} = \int_0^t [k_0(t,s)y(s,\varepsilon) + \varepsilon k_1(t,s)y'(s,\varepsilon)]\,ds + h(t),\ y(0,\varepsilon) = y^0 \tag{10}$$

с нулевым оператором дифференциальной части. Мы не будем останавливаться на обзоре этих результатов. Отметим только, что кроме задач типа (10) с медленно изменяющимися ядрами были рассмотрены и интегродифференциальные системы

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t^2} = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)\,\mathrm{d}\theta} K_0(t,s)y(s,\varepsilon)\,\mathrm{d}s + h(t),\ y(0,\varepsilon) = y^0,\ t\in[0,T], \tag{11}$$

с быстро изменяющимися ядрами и с нулевым оператором дифференциальной части.

В задаче (11) и в приведенных выше задачах роль быстро убывающей составляющей ядра играет экспонента $\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right\}$. Естественным обобщением системы (11) является интегродифференциальная система

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\frac{\mathrm{d}Z(t,s,\varepsilon)}{\mathrm{d}t} = B(t)Z(t,s,\varepsilon),\ Z(s,s,\varepsilon) = I,\ 0\le s\le t\le T;\\
&\varepsilon\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = A(t)y + \int_0^t K(t,s)Z(t,s,\varepsilon)y(s,\varepsilon)\,\mathrm{d}s + h(t),\ \ y(0,\varepsilon) = y^0,
\end{aligned} \tag{12}$$

где во втором уравнении роль быстрых составляющих ядра интегрального оператора играет нормальная фундаментальная матрица решений $Z(t, s, \varepsilon)$ первого уравнения этой системы. Многие идеи С.А. Ломова находят применение и в таких системах, но есть трудности их реализации. Идея решения задачи (12) проста: нужно сначала получить регуляризованную асимптотику матрицы Коши $Z(t, s, \varepsilon)$, а затем применить ко второй системе (12) технику, описанную в известных работах. Однако реализация этой идеи далеко не тривиальна — требуется привлечение тонкого математического аппарата (см. [9]).

В заключение отметим, что в настоящее время идеи С.А. Ломова развиваются не только в плане построения асимптотических решений для ранее нерешенных задач (например, для сингулярно возмущенных интегральных уравнений с точками поворота (А.Г. Елисеев, Д.А. Шапошникова [6]), но и в плане построения голоморфных по параметру регуляризованных рядов для решений сингулярно возмущенных задач (В.И. Качалов [10]).

Литература

1. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1980.
2. **Омуралиев А.С.** // Тр. Киргизского университета. Сер. матем. 1976. Вып. 11. С. 76—81.
3. **Сафонов В.Ф., Калимбетов Б.Т.** // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 696—706.
4. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** // Матем. сборник. 2005. Т. 196. № 2. С. 29—56.
5. **Губин Ю.П., Сафонов В.Ф.** // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 6. С. 930—931.
6. **Елисеев А.Г., Шапошникова Д.А.** // Вестник МЭИ. 2011. № 6. С. 155—158.
7. **Сафонов В.Ф., Бободжанова М.А.** // Вестник МЭИ. 2006. № 6. С. 91—100.
8. **Бободжанов А.А. Сафонов В.Ф.** // Матем. сборник. 2001. Т. 192. № 8. С. 53—78.
9. **Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А, Туйчиев О.Д.** // Математические методы и приложения. Труды 21-х математических чтений РГСУ. — М.: АПК и ППРО, 2012. С. 100—112.
10. **Качалов В.И., Федоров Ю.С.** // Математические методы и приложения. Труды 21-х математических чтений РГСУ. — М.: АПК и ППРО, 2012. С. 42—48.

Статья поступила в редакцию 20.08.12.